Teoria miary
WPPT IIr. semestr letni 2008
WYKŁAD 15: Dezinegracja miary na przestrzeni produktowej

UWAGA: Ten wykład wymaga znajomości elementów analizy funckjonalnej, konkretnie Twierdzenia Riesza o reprezentacji funckcjonału (tylko nieujemnego) na $C(Y)$ (Y -zwarta metryczna).

19/05/2008

Przeliczalna generowalność

Definicja. Powiemy, że sigma-ciało $\mathcal{G}$ jest *przeliczalnie generowalne*, jeśli istnieje rodzina przeliczalna $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ taka, że $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{G}$.

Ponieważ ciało generowane przez $\mathcal{C}$ jest również przeliczalne można od razu założyć, że $\mathcal{C}$ jest ciałem.

Przykład. Jeśli Y jest przestrzenią metryczną ośrodkową (na przykład zwartą) to sigma-ciało borelowskie $\mathcal{G}$ jest przeliczalnie generowalne. Faktycznie. Zbiorem $\mathcal{C}$ jest (ciało generowane przez) zbiór kul o promieniach wymiernych wokół punktów ośrodka.

Dezintegracja

Rozważmy produkt dwóch przestrzeni mierzalnych z sigma-ciałem produktowym $(X \times Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$. Pamiętamy, że Twierdzenie Fubiniego charakteryzuje tzw. miarę produktową i pozwala liczyć całki tą miarą poprzez całki iterowane. Twierdzenie to jednak nie stosuje się do innych miar na sigma-ciele produktowym. Ten właśnie przypadek będzie nas teraz interesował. Niech zatem μ oznacza teraz dowolną miarą na $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ (niekoniecznie produktową).

Definicja 1. *Miarą brzegową* (inaczej *marginalną*) na X nazywamy miarę μ_X na $(X, \mathcal{F})$ określoną wzorem
$$\mu_X(A) = \mu(A \times Y).$$

Analogicznie określa się miarę marginalną μ_X na Y.

Definicja 2. *Dezintegracją* miary μ względem μ_X nazywamy rodzinę miar
$$\{\mu_x : x \in X'\}$$
określonych na $(Y, \mathcal{G})$ dla x ze zbioru X' miary pełnej μ_X (tzn. o dopełnieniu miary zero), o następującej własności: dla każdego $B \in \mathcal{G}$ funkcja $x \mapsto \mu_x(B)$ jest $\mathcal{F}$-mierzalna oraz dla każdego $A \in \mathcal{F}$

$$\mu(A \times B) = \int_A \mu_x(B)\, d\mu_X(x). \tag{1}$$

Przykład. Jeśli μ jest skończoną miarą produktową, $\mu = \nu_1 \times \nu_2$ to oczywiście $\mu_X = \nu_1$. Wtedy rodzina miar $\{\mu_x = \nu_2 : x \in X\}$ jest dezintegracją miary μ. Faktycznie, dla każdego prostokąta mierzalnego $A \times B$ w produkcie zachodzi $\mu(A \times B) = \nu_1(A) \cdot \nu_2(B) = \int_A \nu_2(B)\, d\nu_1(x)$.

Uwaga: Jeśli μ_x jest dezintegracją to nietrudno sprawdza się z liniowości całki, że dla funkcji prostych f stałych na pewnych prostokątach mamy

$$\int f(x,y)\, d\mu(x,y) = \int \left[\int f(x,y)\, d\mu_x(y) \right] d\mu_X(x) \tag{2}$$

(i wewnętrzna całka jest $\mathcal{F}$-mierzalną funkcją x). Ponieważ każdą nieujemną funkcję mierzalną można przybliżać niemalejąco funkcjami prostymi powyższego typu, to z twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej (zastosowanego do całki po lewej stronie i dwukrotnie po prawej) powyższy wzór przenosi się na funkcje nieujemne. Poprzez rozkład na f^+ i f^- i znowu z liniowości całki wzór (2) przenosi się na wszelkie funkcje znakowane, dla których całka po lewej stronie ma sens (sprawdza się, że wtedy po prawej stronie sens ma całka wewnętrzna dla prawie każdego x oraz całka zewnętrzna). Oczywiście, jeśli dla każdej funkcji całkowalnej dwóch zmiennych spełniony jest wzór (2), to stosując go do funkcji charakterystycznej prostokąta $A \times B$ otrzymamy wzór (1). Zatem w definicji dezintegracji można stosować wymiennie wzór (1) (dla wszytkich prostokątów) lub wzór (2) (dla wszystkich funkcji całkowalnych).

Fakt. *Jeśli $\mathcal{G}$ jest przeliczalnie generowalne i istnieje dezintegracja $\{\mu_x\}$ miary μ względem μ_X, to dezintegracja ta jest jedyna w tym sensie, że każda inna dezintegracja $\{\mu'_x\}$ spełnia μ_X-prawie wszędzie równość $\mu_x = \mu'_x$.*

(Dowód na ćwiczenia.)

Podaliśmy definicję dezintegracji i wiemy już, że pozwala ona wyrazić całkę miarą μ poprzez całkę iteorwaną (wzór (2)), ale nadal nie wiemy, czy taka dezintegracja w ogóle istnieje. Poniższe twierdzenie stosuje się do większości przypadków rozważanych w zagadnieniach w teorii miary i w analizie:

Twierdzenie o dezintegracji. *Niech $(X, \mathcal{F})$ będzie dowolną przestrzenią mierzalną, a $(Y, \mathcal{G})$ niech oznacza zwartą przestrzeń metryczną z sigma-ciałem borelowskim. Niech μ będzie dowolną miarą skończoną na sigma-ciele produktowym $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$. Wtedy istnieje dezintegracja $\{\mu_x\}$ miary μ względem μ_X.*

Dowód. Wiadomo, że przestrzeń $C(Y)$ funkcji rzeczywistych ciągłych na Y z metryką jednostajną jest ośrodkowa. Niech $\mathcal{S}$ będzie zbiorem funkcji gęstym w $C(Y)$. Biorąc wszystkie kombinacje liniowe funkcji z $\mathcal{S}$ o współczynnikach wymiernych otrzymamy również zbiór przeliczalny gęsty zamknięty na takie kombinacje. Zatem możemy założyć, że rodzina $\mathcal{S}$ jest zamknięta na kombinacje wymierne. Dla każdej $f \in C(Y)$ określmy miarę znakowaną ν_f na $(X, \mathcal{F})$ wzorem

$$\nu_f(A) = \int \mathbf{1}_A(x) f(y)\, d\mu(x,y). \tag{3}$$

Sprawdzenie, że to jest miara jest natychmiastowe: dla zbiorów rozłącznych A_n mamy $\mathbf{1}_{\bigcup_n A_n} = \sum_n \mathbf{1}_{A_n} = \lim_n \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}$, dalej stusujemy liniowość całki (dla sum skończonych) i twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zdominowanej aby przejść do sum przeliczalnych (mamy $|\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}(x) \cdot f(y)| \leq |f|$, a $|f|$ jest funkcją ciągłą, stąd ograniczoną, a więc całkowalną dla miarą skończonej μ_X). Widać, że

$$|\nu_f(A)| \leq \|f\| \mu_X(A), \tag{4}$$

($\|f\|$ oznacza tu normę supremum) w szczególności ν_f jest absolutnie ciągła względem μ_X. Ponadto, gdy $f \geq 0$ to $\nu_f \geq 0$. Z twierdzenia Radona-Nikodyma istnieje zatem (określona μ_X-prawie wszędzie) gęstość g_f na X taka, że $d\nu_f = g_f d\mu_X$, czyli, że dla każdego $A \in \mathcal{F}$ można napisać

$$\int \mathbf{1}_A(x) f(y)\, d\mu(x,y) = \int_A g_f(x)\, d\mu_X(x). \tag{5}$$

Znów widać, że dla $f \geq 0$, $g_f(x) \geq 0$ μ_X-prawie wszędzie. Ponieważ całka z g_f po dowolnym zbiorze A ma wartość bezwzględną nie większą niż miara tego zbioru razy norma f (połącz wzory (3)-(5)), to $|g_f(x)| \leq \|f\|$ μ_X-prawie wszędzie. Jeśli teraz $f = a'f' + a''f''$ jest kombinacją liniową, to z liniowości obu całek widać, że funkcja $a'g_{f'} + a''g_{f''}$ spełnia warunek na bycie gęstością dla miary ν_f. Z jednoznaczności gęstości, mamy zatem równość μ_X-prawie wszędzie

$$g_{a'f'+a''f''}(x) = a'g_{f'}(x) + a''g_{f''}(x).$$

Niech X' będzie zbiorem (pełnej miary μ_X), gdzie powyższa równość jest spełniona dla dowolnej pary funkcji f', f'' z ośrodka $\mathcal{S}$ i dowolnej pary współczynników wymiernych a, a' (zbiór takich czwórek jest przeliczalny) i gdzie dodatkowo dla każdej funkcji f z ośrodka $\mathcal{S}$ zachodzi $|g_f(x)| \leq \|f\|$ i $g_f(x) \geq 0$ o ile $f \geq 0$.
Dla $x \in X'$ określmy funkcjonał na $C(Y)$ wzorem

$$P_x(f) = \lim_n g_{f_n}(x),$$

gdzie f_n jest dowolnym ciągiem funkcji z $\mathcal{C}$ zbieżnym w normie (czyli jednostajnie) do f. Najpierw trzeba sprawdzić, że definicja ta nie zależy od wyboru ciągu. Jeśli $f_n \to f$ i $f_n' \to f$, to $\|f_n - f_n'\| \to 0$ oraz różnice te należą do $\mathcal{S}$. Stąd, rzeczywiście

$$|\lim_n g_{f_n}(x) - \lim_n g_{f_n'}(x)| = \lim_n |(g_{f_n} - g_{f_n'})(x)| = \lim_n |g_{f_n - f_n'}(x)| \leq \lim_n \|f_n - f_n'\| = 0.$$

Stąd w szczególności, dla $f \in \mathcal{C}$ (biorąc $f_n = f$) mamy

$$P_x(f) = g_f(x). \tag{6}$$

Dalej sprawdzamy, że P_x jest funkcjonałem liniowym. Jeśli $f = a'f' + a''f''$ i $f' = \lim f_n'$, $f'' = \lim f_n''$, gdzie $f_n', f_n'' \in \mathcal{S}$, to $f = \lim a_n' f_n' + a_n'' f_n''$, gdzie a_n' i a_n'' są ciągami liczb wymiernych zbieżnymi odpowiednio do a' i a''. Zatem

$$P_x(f) = \lim_n g_{a_n' f_n' + a_n'' f_n''} = \lim_n a_n' g_{f_n'} + \lim_n a_n'' g_{f_n''} = a' P_x(f') + a'' P_x(f'').$$

Ponadto funkcjonał ten jest ograniczony (a więc ciągły), o normie ≤ 1, gdyż

$$|P_x(f)| = \lim |g_{f_n}(x)| \leq \lim \|f_n\| = \|f\|$$

(ostatnia równość wynika z ciągłości normy). Wreszcie zauważmy, że jeśli $f > 0$, to $f_n > 0$ od pewnego n zatem $g_{f_n}(x) \geq 0$ a stąd $P_x(f) \geq 0$. Z ciągłości funkcjonału wynika teraz, że $P_f(x) \geq 0$ dla dowolnej $f \geq 0$. Czyli P_x jest funkcjonałem nieujemnym.
Teraz korzystamy z Twierdzenia Riesza. Dla każdego $x \in X'$ istnieje miara (nieujemna skończona) μ_x na $(Y, \mathcal{G})$ spełniająca

$$P_x(f) = \int f d\mu_x.$$

W szczególności dla $f \in \mathcal{S}$ ze wzoru (6) mamy

$$\int f d\mu_x = g_f(x)$$

i dla $A \in \mathcal{F}$

$$\int \mathbf{1}_A(x) f(y)\, d\mu(x,y) \overset{(5)}{=} \int_A g_f(x)\, d\mu_X(x) = \int_A \left[\int f\, d\mu_x \right] d\mu_X(x).$$

Ponieważ funkcja charakterystyczna dowolnego zbioru otwartego $B \subset Y$ jest niemalejącą granicą nieujemnych funkcji z $\mathcal{S}$, więc z monotonicznego twierdzenia Lebesgue'a (po obu stronach) można f w powyższej równości zastąpić funkcją $\mathbf{1}_B$. Czyli

$$\int \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(y)\, d\mu(x,y) = \int_A \left[\int \mathbf{1}_B\, d\mu_x \right] d\mu_X(x) = \int_A \mu_x(B)\, d\mu_X(x).$$

Ale lewa strona równa się po prostu $\int \mathbf{1}_{A\times B}(x,y)\, d\mu(x,y)$ czyli $\mu(A\times B)$. Dostaliśmy równość (1) dla otwartych B. Ponieważ zbiory otwarte generują sigma ciało $\mathcal{G}$, więc równość zachodzi dla dowolnych prostokątów mierzalnych. Stąd $\{\mu_x : x \in X'\}$ jest dezintegracją μ względem μ_X. $\square$

Tomasz Downarowicz